

文章编号: 1000-7598 (2010) 07-2164-09

饱和地基上条形弹性基础的摇摆振动

马晓华^{1,2}, 蔡袁强¹, 徐长节¹

(1. 浙江大学 软土与环境工程教育部重点实验室, 杭州 310027; 2. 浙江省水利河口研究院, 浙江省水利防灾减灾重点实验室, 杭州 310020)

摘 要: 基于 Biot 动力方程, 研究了饱和均质弹性半空间上弹性条形基础的摇摆振动问题。通过 Fourier 积分变换求解了饱和土的动力控制方程, 然后结合基础底部为混合边界的条件得到了弹性条形基础的摇摆振动对偶积分方程, 利用正交多项式将对偶积分方程转化为求解一组线性代数方程组, 同时利用复合 Simpson 法则, 得到了动力柔度系数的表达式, 通过算例得出了不同参数时地基动力柔度系数随无量纲频率的关系曲线。

关 键 词: 摇摆振动; 弹性条形基础; 动力柔度系数; 对偶积分方程

中图分类号: TU 435

文献标识码: A

Rocking vibration of an elastic strip footing on saturated soil

MA Xiao-hua^{1,2}, CAI Yuan-qiang¹, XU Chang-jie¹

(1. MOE Key Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China

2. Key Laboratory of Disaster Prevention and Reduction, Zhejiang Institute of Hydraulics & Estuary, Hangzhou 310020, China;)

Abstract: In order to delineate the complex coupling behavior of the soil under the rocking loading, the analytical solution for an elastic strip foundation on saturated soil under a rocking moment is developed under the framework of the Biot's coupling theory. By employing the method of Fourier transform, the dynamic governing differential equations for saturated poroelastic medium are solved. Considering the mixed boundary-value conditions at the bottom of the foundation, a pair of dual integral equations governing the rocking vibration of an elastic strip footing are then derived, which are further converted to linear equations by means of infinite series of orthogonal functions--the Jacobi polynomials. A numerical procedure is proposed to solve the equations. The dynamic compliance functions for rocking vibration are also derived. The effects of plate flexibility, ground permeability and Poisson's ratio on the dynamic compliance are investigated; and some meaningful conclusions are drawn.

Key words: rocking vibration; elastic strip foundation; dynamic compliance; dual integral equations

1 引 言

饱和地基上条形弹性基础的摇摆振动无论是在理论上还是在工程实际上都是岩土工程界的重要问题。在地震荷载、风荷载和波浪荷载作用下都可使建筑物的基础发生摇摆振动。基础发生摇摆振动时的辐射阻尼小, 同时基础达到共振频率时, 将对基础产生很大的破坏, 因此, 研究基础的摇摆振动问题是非常有意义的。

在过去已有大量学者对土与条形基础的振动问题进行了研究。Oien^[1-2]应用动力 Green 函数和 Chebyshev 正交多项式先后分析了条形刚性基础和条形弹性基础的竖向振动问题, 给出了相应的动力

刚度曲线。Luco 等人^[3]使用 Muskhelishvili 的奇异积分方程分析了条形刚性基础在半空间表面上的谐和振动: 竖向、滑移及摇摆振动同时发生的完全黏结型混合边值问题, 对泊松比 μ 为 0.5 的情况得到了精确解, 对 $\mu < 0.5$ 的情况得到了低频下的近似解, 并将所得到的解答与放松边界条件下的解答进行了对比, 通过分析发现, 垂直振动时在完全黏结和放松条件下两者的计算结果很接近。Gazetas 和 Roesset^[4]采用半解析方法获得了层状半空间上条形刚性基础的动态柔度曲线。Hryniewicz^[5]采用应力边界问题的迭加方法, 分析了弹性半空间上条形基础的动态响应。

然而在以往文献中采用的两个假定过于理想

收稿日期: 2008-12-30

第一作者简介: 马晓华, 男, 1981 年生, 博士后, 主要从事岩土工程土动力学及地震工程方面的研究。E-mail: maxhzju@yahoo.com.cn

化, 一是假定土为理想单相弹性介质; 二是基础为刚性的。对于前一假设, 因实际工程中大部分土都是由固相、液相、气相三相组成的复杂介质, 单相假定显得不够全面合理。自从 Biot^[6-7]于 1956 年建立了流体饱和多孔介质波动方程(1962 年 Biot 补充了该理论), 使得真正意义地研究饱和地基上基础振动特性成为了可能。Kassir 和 Xu^[8]研究了多孔饱和半空间上条形基础振动的混合边值问题。Senjuntichai^[9]研究了埋置在层状饱和半空间内部的柔性圆板(服从经典 Kirchhoff 理论的薄板, 假设板与土体光滑接触且板完全透水或完全不透水)受简谐竖向激振力作用时的动力响应问题。Rajapakse 等人^[10]运用精确刚度矩阵方法计算了埋置在多层饱和弹性层状介质内部的条形基础受简谐荷载作用的动力响应问题。金波等^[11-13]分别研究了多孔饱和半空间上刚性基础的竖向、水平和摇摆振动问题。陈胜立^[14]根据陈龙珠^[15]提出的一组饱和土弹性波动方程, 应用解析的方法, 建立了一组描述弹性圆板竖向振动的对偶积分方程, 深入研究了饱和地基上弹性圆板的竖向振动特性, 文中考虑了基础板弹性特性的影响, 并给出了算例分析, 总结了这些板振动的一些规律性。另外, 付兵^[16]同样根据陈龙珠提出的饱和土弹性波动方程, 研究了饱和地基上弹性圆板的摇摆振动特性。李庆金^[17]应用 Fourier 积分变换建立对偶积分方程, 用数值计算方法得到了饱和地基上条形刚基础的竖向振动规律。

目前对于基础在饱和地基上的摇摆振动问题所作的研究尚不多见, 本文从 Biot 方程出发, 应用 Fourier 积分变换的方法, 并利用 Jacobi 正交多项式求解了饱和地基上弹性条形基础的摇摆振动的混合边值问题。深入研究了无量纲频率、动力渗透系数和泊松比等因素对动力柔度系数的影响。

2 饱和土基本动力方程

不考虑土和水的重量, 同时认为土是各向同性的、水是不可压缩的。饱和地基上条形弹性基础摇摆振动的力学模型和坐标系如图 1 所示, 宽度为 $2b$ 的条形基础支承在饱和地基半空间表面上, 基础的边界自由, 其中心承受简谐激振力 $Me^{i\omega t}$, ω 为振动圆频率。基础的质量密度为 $\bar{\rho}$, 厚度为 $\bar{h}$, 泊松比为 ν_f , 挠曲刚度为 D_f , 弹性模量为 E_f 。

本文基本上采用了力学中常用的常规符号及习惯表示法。应力的正、负号按土力学的习惯, 即压为正, 拉为负。

平衡方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial p_f}{\partial x} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + \frac{\partial p_f}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: u 、 w 分别为土骨架的水平 and 竖直位移; w_x 、 w_z 分别为水相对于土骨架的水平 and 竖直位移; σ'_x 、 σ'_z 分别为水平向和竖直向的有效正应力; p_f 为超静孔隙水压力; ρ_s 、 ρ_f 分别为土颗粒和水的密度; n 为土体的孔隙率; ρ 为饱和土的质量密度: $\rho = (1-n)\rho_s + n\rho_f$ 。

应力和位移方程:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= -\frac{2G(1-\mu)}{1-2\mu} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2G\mu}{1-2\mu} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \sigma'_z &= -\frac{2G\mu}{1-2\mu} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2G(1-\mu)}{1-2\mu} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xz} &= -G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: G 为土的剪切模量; μ 为泊松比
流体平衡方程:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p_f}{\partial x} &= \frac{\rho_f g}{k_d} \frac{\partial w_x}{\partial t} + \rho_f \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\rho_f}{n} \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2} \\ -\frac{\partial p_f}{\partial z} &= \frac{\rho_f g}{k_d} \frac{\partial w_z}{\partial t} + \rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho_f}{n} \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

渗流连续性方程:

$$-\frac{\partial^2 w_x}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 w_z}{\partial z \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} \quad (4)$$

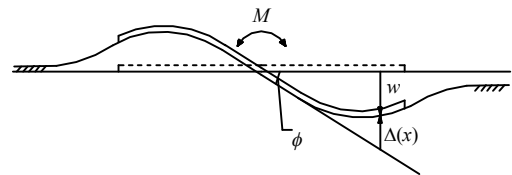


图 1 力学模型与坐标系

Fig.1 Description of the model and coordinate system

3 基本动力方程的求解

在简谐荷载作用下, 位移、应力和超静孔隙水压力可以表示为

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u} e^{i\omega t}, w = \bar{w} e^{i\omega t}, w_x = \bar{w}_x e^{i\omega t} \\ w_z &= \bar{w}_z e^{i\omega t}, \tau_{xz} = \bar{\tau}_{xz} e^{i\omega t}, \sigma_x = \bar{\sigma}_x e^{i\omega t} \\ \sigma_z &= \bar{\sigma}_z e^{i\omega t}, p_f = \bar{p}_f e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中: ω 为圆频率。

Fourier 变换记为

$$f^* = \mathfrak{R}f = \int_{-\infty}^{\infty} f e^{i\zeta x} dx \quad (6)$$

由式 (1) ~ (5) 联立并经 Fourier 变换得

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \bar{u}^*}{dz^2} - F^2 \bar{u}^* + \frac{i\zeta}{1-2\mu} \bar{e}^* - \frac{i\zeta(c+1)}{G} \bar{p}_f^* &= 0 \\ \frac{d^2 \bar{w}^*}{dz^2} - F^2 \bar{w}^* + \frac{1}{1-2\mu} \frac{d\bar{e}^*}{dz} - \frac{(c+1)}{G} \frac{d\bar{p}_f^*}{dz} &= 0 \\ \frac{d^2 \bar{p}_f^*}{dz^2} - \zeta^2 \bar{p}_f^* &= DE\bar{e}^*, \quad \bar{e}^* = i\zeta \bar{u}^* + \frac{d\bar{w}^*}{dz} \\ \frac{d^2 \bar{e}^*}{dz^2} - q^2 \bar{e}^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\text{式中: } c = \frac{nk\omega}{gm - k\omega}, \quad \bar{e} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}, \quad F^2 = \zeta^2 - \omega^2.$$

$$(c\rho_f + \rho)/G, \quad D = \frac{\omega^2(1-2\mu)(2c\rho_f + \rho_f - c\rho)}{2cG(1-\mu)}, \quad E =$$

$$\frac{\omega^2 \rho_f(c+1)}{Dc}, \quad q^2 = \zeta^2 + D.$$

式 (7) 中只有前 4 个式子是独立的, 第 5 式可联合前 4 式推得。

考虑波的辐射条件后, 解式 (7) 得到

$$\left. \begin{aligned} i\bar{u}^*(\zeta, z) &= -A_0\zeta H e^{-qz} - B_0\zeta M e^{-\zeta z} - C_0 e^{-Fz} / \zeta \\ \bar{w}^*(\zeta, z) &= -A_0 q H e^{-qz} - B_0\zeta M e^{-\zeta z} - C_0 e^{-Fz} / F \\ \bar{p}_f^*(\zeta, z) &= A_0 E e^{-qz} + B_0 e^{-\zeta z} \\ \bar{e}^*(\zeta, z) &= A_0 e^{-qz} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\text{式中: } H = \frac{1}{q^2 - \zeta^2} = \frac{1}{D}, \quad M = \frac{c+1}{G(\zeta^2 - F^2)} =$$

$\frac{c+1}{\omega^2(c\rho_f + \rho)}$, 可由土体的本构模型、有效应力原理和式 (5) 得到

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}_{xz} &= -G \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \\ \bar{\sigma}'_z &= -2G \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\mu}{1-2\mu} \bar{e} \right) \\ \bar{\sigma}_z &= \bar{\sigma}'_z + \bar{p}_f \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

通过 Fourier 变换, 由式 (8)、(9) 得

$$\left. \begin{aligned} i\bar{\tau}_{xz}^*(\zeta, z) &= -2A_0\zeta q H G e^{-qz} - 2B_0\zeta^2 M G e^{-\zeta z} - \\ &\quad C_0 \left(\frac{F}{\zeta} + \frac{\zeta}{F} \right) G e^{-Fz} \\ \bar{\sigma}_z^*(\zeta, z) &= -2G [A_0(q^2 H + \mu/(1-2\mu)) e^{-qz} + \\ &\quad B_0\zeta^2 M e^{-\zeta z} + C_0 e^{-Fz}] + A_0 E e^{-qz} + B_0 e^{-\zeta z} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

4 饱和地基上条形弹性基础摇摆振动的混合边值问题

假设条形弹性基础与饱和土体为光滑接触, 且饱和地基表面为透水的, 则地基表面的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}_{xz}(x, 0) &= 0 & 0 \leq |x| \leq \infty \\ \bar{\sigma}_z(x, 0) &= 0 & b < |x| \leq \infty \\ \bar{p}_f(x, 0) &= 0 & 0 \leq |x| \leq \infty \\ \bar{w}(x, 0) &= x\phi - \bar{\Delta}(x) & 0 \leq |x| \leq b \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中: $\bar{\sigma}_z$ 、 $\bar{\tau}_{xz}$ 分别为土骨架的正应力、剪应力; $\bar{p}_f$ 为孔隙水压力; $\bar{w}$ 为条形基础与地基接触面处的位移; ϕ 为条形基础中心的转角; $\bar{\Delta}(x)$ 为条形基础相对于中心的挠曲。

结合式 (8) 中第 2、3 式, 式 (10), 对 $\bar{\sigma}_z(\zeta, 0)$ 、 $\bar{p}_f(\zeta, 0)$ 、 $\bar{\tau}_{xz}(\zeta, 0)$ 、 $\bar{w}(\zeta, 0)$ 分别进行 Fourier 变换, 得到:

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}^*(\zeta, 0) &= -A_0 q H - B_0 \zeta M - C_0 / F \\ \bar{p}_f^*(\zeta, 0) &= A_0 E + B_0 = 0 \\ i\bar{\tau}_{xz}^*(\zeta, 0) &= -2A_0 \zeta q H G - 2B_0 \zeta^2 M G - \\ &\quad C_0 (F/\zeta + \zeta/F) G = 0 \\ \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) &= -2G [A_0 (q^2 H + \mu/(1-2\mu)) + \\ &\quad B_0 \zeta^2 M + C_0] + A_0 E + B_0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

解式 (12), 得到

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}^*(\zeta, 0) &= f(\zeta) \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) \\ f(\zeta) &= - \left(\frac{F}{2\zeta^2} - \frac{1}{2F} \right) \\ &\quad \frac{1}{2G \left[1 - \left(q^2 H + \frac{\mu}{1-2\mu} - \zeta^2 M E \right) \frac{F/\zeta + \zeta/F}{2\zeta q H - 2\zeta^2 M E} \right]} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

根据式 (13), 并进行 Fourier 反变换得

$$\bar{w}(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(\zeta) \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) \sin(\zeta x) d\zeta \quad (14)$$

将式 (11) 中的第 4 式代入式 (13), 则有:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(\zeta) \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) \sin(\zeta x) d\zeta = x\phi - \bar{\Delta}(x) \quad (15)$$

式中条形弹性基础的挠度 $\bar{\Delta}(x)$ 须满足经典薄板理论的动力平衡方程 (Szilard^[18]):

$$D_f \nabla^4 \Delta(x) = \bar{\rho} \tilde{h} \frac{d^2 w}{dt^2} dx - \sigma_z \quad (16)$$

结合式 (14), 并经 Fourier 变换得:

$$D_f \nabla^4 \Delta(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty (1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 f(\zeta)) \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) \sin \zeta x d\zeta \quad (17)$$

$$\text{式中: } D_f = \frac{E_f h^3}{12(1 - \nu_f^2)}; \quad \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

式(16)的通解为

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(x) = & \frac{1}{D_f} (C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4) - \\ & \frac{1}{\pi D_f} \int_0^\infty \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 f(\zeta))}{\zeta^4} \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) (\sin \zeta x - 1) d\zeta \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{由 } \bar{\Delta}(x)|_{x=0} = 0 \text{ 可得 } C_4 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 f(\zeta))}{\zeta^4} \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) d\zeta,$$

$$\text{又由对称性可得 } \left. \frac{d\bar{\Delta}(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, \text{ 所以}$$

$$C_3 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 f(\zeta))}{\zeta^3} \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) d\zeta; \text{ 对于自由}$$

$$\text{边界情形, 再由 } V_x|_{x=b} = D_f \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu_f) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \Big|_{x=b} =$$

$$0, \quad m_x|_{x=b} = D_f \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_f \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=b} = 0, \text{ 有}$$

$$C_1 = \frac{1}{6\pi} \int_0^\infty \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 f(\zeta))}{\zeta} \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) \cos \zeta b d\zeta \quad (19)$$

$$\begin{aligned} C_2 = & -\frac{b}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 f(\zeta))}{\zeta} \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) \cos \zeta b d\zeta - \\ & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 f(\zeta))}{\zeta^2} \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) \sin \zeta b d\zeta \end{aligned} \quad (20)$$

将 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 反代入式(18), 于是得到:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(x) = & -\frac{x^3}{6\pi D_f} \int_0^\infty \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 f(\zeta))}{\zeta} \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) \cos \zeta b d\zeta - \\ & \frac{bx^2}{\pi D_f} \int_0^\infty \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 f(\zeta))}{\zeta} \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) \cos \zeta b d\zeta - \\ & \frac{x^2}{\pi D_f} \int_0^\infty \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 f(\zeta))}{\zeta^2} \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) \sin \zeta b d\zeta - \\ & \frac{x}{\pi D_f} \int_0^\infty \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 f(\zeta))}{\zeta^3} \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) d\zeta + \\ & \frac{1}{\pi D_f} \int_0^\infty \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 f(\zeta))}{\zeta^4} \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) d\zeta - \\ & \frac{1}{\pi D_f} \int_0^\infty \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 f(\zeta))}{\zeta^4} \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) (\sin \zeta x - 1) d\zeta \end{aligned} \quad (21)$$

根据式(15)、式(21), 再由式 $\bar{\sigma}_z(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) \sin(\zeta x) d\zeta$, 可以得到一组表征条形弹性基础摇摆振动的混合边值问题如下的对偶积分方程:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(\zeta) \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) \sin(\zeta x) d\zeta = \\ & x\phi + \frac{x^3}{6\pi D_f} \int_0^\infty \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 f(\zeta))}{\zeta} \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) \cos \zeta b d\zeta + \\ & \frac{bx^2}{\pi D_f} \int_0^\infty \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 f(\zeta))}{\zeta} \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) \cos \zeta b d\zeta + \\ & \frac{x^2}{\pi D_f} \int_0^\infty \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 f(\zeta))}{\zeta^2} \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) \sin \zeta b d\zeta + \\ & \frac{x}{\pi D_f} \int_0^\infty \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 f(\zeta))}{\zeta^3} \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) d\zeta - \\ & \frac{1}{\pi D_f} \int_0^\infty \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 f(\zeta))}{\zeta^4} \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) d\zeta + \\ & \frac{1}{\pi D_f} \int_0^\infty \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 f(\zeta))}{\zeta^4} \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) (\sin \zeta x - 1) d\zeta \end{aligned} \quad 0 \leq |x| \leq b \quad (22)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0) \sin(\zeta x) d\zeta = 0 \quad |x| > b \quad (23)$$

$$\text{令: } x = b\tilde{x}, \quad \zeta = \frac{\tilde{\zeta}}{b}, \quad \tilde{\Delta}_0 = \frac{\bar{\Delta}_0}{b}, \quad \tilde{f}(\tilde{\zeta}) = Gf(\zeta),$$

$\tilde{\sigma}_z^*(\tilde{\zeta}, 0) = \frac{\bar{\sigma}_z^*(\zeta, 0)}{G}$, $\delta = \frac{Gb^2}{D_f}$ 则式(22)、(23)可转化成如下的对偶积分方程组:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \tilde{f}(\tilde{\zeta}) \tilde{\sigma}_z^*(\tilde{\zeta}, 0) \sin(\tilde{\zeta} \tilde{x}) d\tilde{\zeta} + \delta b^2 (6\tilde{x}^3 - \tilde{x}^2) \\ & \int_0^\infty \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 \tilde{f}(\tilde{\zeta})/G)}{\tilde{\zeta}} \tilde{\sigma}_z^*(\tilde{\zeta}, 0) \cos \tilde{\zeta} d\tilde{\zeta} - \\ & \delta b^2 \tilde{x}^2 \int_0^\infty \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 \tilde{f}(\tilde{\zeta})/G)}{\tilde{\zeta}^2} \tilde{\sigma}_z^*(\tilde{\zeta}, 0) \sin \tilde{\zeta} d\tilde{\zeta} - \\ & \delta b^2 \tilde{x} \int_0^\infty \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 \tilde{f}(\tilde{\zeta})/G)}{\tilde{\zeta}^3} \tilde{\sigma}_z^*(\tilde{\zeta}, 0) d\tilde{\zeta} - \\ & b^2 \delta \int_0^\infty \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 \tilde{f}(\tilde{\zeta})/G)}{\tilde{\zeta}^4} \tilde{\sigma}_z^*(\tilde{\zeta}, 0) (\sin \tilde{\zeta} \tilde{x} - 2) d\tilde{\zeta} = \\ & \pi x \phi b^2 \quad 0 \leq |\tilde{x}| \leq 1 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\int_0^\infty \tilde{\sigma}_z^*(\tilde{\zeta}, 0) \sin(\tilde{\zeta} \tilde{x}) d\tilde{\zeta} = 0 \quad |\tilde{x}| > 1 \quad (25)$$

设 $\tilde{\sigma}_z^*(\tilde{x}, 0)$ 能表达为 Jacobi 多项式组成的级数, 即:

$$\bar{\sigma}_z(\tilde{x}, 0) = \frac{\tilde{x}\phi b}{\sqrt{1-\tilde{x}^2}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n G_n \left(1, \frac{3}{2}, \tilde{x}^2 \right) \quad 0 \leq |\tilde{x}| \leq 1 \quad (26)$$

利用如下的关系式:

$$\int_0^1 \frac{\tilde{x}}{\sqrt{1-\tilde{x}^2}} G_n \left(1, \frac{3}{2}, \tilde{x}^2 \right) \sin \tilde{\zeta} \tilde{x} d\tilde{x} = \frac{\pi}{2} J_{2n+1}(\tilde{\zeta}) \quad (27)$$

式中: $G_n(\alpha, \gamma, x) = {}_2F_1(-n, \alpha + n; \gamma; x)$ 。对式(25)进行 Fourier 变换后, 可得:

$$\bar{\sigma}_z^*(\tilde{\zeta}, 0) = \pi x \phi b^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_{2n+1}(\tilde{\zeta}) \quad (28)$$

又有:

$$\int_0^{\infty} J_{2n+1}(\tilde{\zeta}) \sin \tilde{\zeta} \tilde{x} d\tilde{\zeta} = \begin{cases} (-1)^n (1 - \tilde{x}^2)^{-1/2} T_{2n+1}(\tilde{x}) & 0 < |\tilde{x}| < 1 \\ 0, & 1 < |\tilde{x}| < \infty \end{cases} \quad (29)$$

式中: $T_n(\tilde{x}) = \cos(n \arccos \tilde{x})$ 。

据式(29)可得, 式(25)每一项均自动满足。把式(28)代入式(24), 可得:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\int_0^{\infty} \tilde{f}(\tilde{\zeta}) J_{2n+1}(\tilde{\zeta}) \sin(\tilde{\zeta} \tilde{x}) d\tilde{\zeta} + \delta b^2 (6\tilde{x}^3 - \tilde{x}^2) \cdot \right. \\ & \int_0^{\infty} \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 \tilde{f}(\tilde{\zeta})/G)}{\tilde{\zeta}} J_{2n+1}(\tilde{\zeta}) \cos \tilde{\zeta} d\tilde{\zeta} - \\ & \delta b^2 \tilde{x}^2 \int_0^{\infty} \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 \tilde{f}(\tilde{\zeta})/G)}{\tilde{\zeta}^2} J_{2n+1}(\tilde{\zeta}) \sin \tilde{\zeta} d\tilde{\zeta} - \\ & \delta b^2 \tilde{x} \int_0^{\infty} \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 \tilde{f}(\tilde{\zeta})/G)}{\tilde{\zeta}^3} J_{2n+1}(\tilde{\zeta}) d\tilde{\zeta} - \\ & \left. b^2 \delta \int_0^{\infty} \frac{(1 + \tilde{\rho} \tilde{h} \omega^2 \tilde{f}(\tilde{\zeta})/G)}{\tilde{\zeta}^4} J_{2n+1}(\tilde{\zeta}) \cdot \right. \\ & \left. (\sin \tilde{\zeta} \tilde{x} - 2) d\tilde{\zeta} \right) = 1 \end{aligned} \quad (30)$$

若考虑基础为无质量弹性基础 ($\tilde{\rho} = 0$), 则式(30)可分别转化为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\int_0^{\infty} \tilde{f}(\tilde{\zeta}) J_{2n+1}(\tilde{\zeta}) \sin(\tilde{\zeta} \tilde{x}) d\tilde{\zeta} - \right. \\ & \left. b^2 \delta \int_0^{\infty} \frac{1}{\tilde{\zeta}^4} J_{2n+1}(\tilde{\zeta}) (\sin \tilde{\zeta} \tilde{x} - 2) d\tilde{\zeta} \right) - \\ & A_0 b^2 \delta \tilde{x}^2 - A_0 b \delta \tilde{x} = 1 \end{aligned} \quad (31)$$

基础底面反力的合力为

$$R = \int_{-b}^b \bar{\sigma}_z(x, 0) dx = \pi G \tilde{x} \phi b^2 A_0 = \pi G x \phi b A_0 \quad (32)$$

现定义 (严人觉等人^[19]):

$$\bar{P} = \pi G \frac{1}{C_v} x \phi \quad (33)$$

则可得饱和地基上条形弹性基础的动力柔度系数 C_M :

$$C_M = \frac{1}{b A_0} \quad (34)$$

我们可得 $f_1 = \text{Re}[C_M]$ 、 $f_2 = \text{Im}[C_M]$, 基础的刚度为 $K = \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2}$, 阻尼为 $C = -\frac{f_2}{(f_1^2 + f_2^2) b_0}$, 其中 $b_0 = b \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}}$, 为无量纲频率。

在上述推导过程中, 令 $\rho_f = 0$, 即不考虑水对振动的影响, 则问题转变为研究单相弹性半空间上条形弹性基础的摇摆振动。在推导过程中, 若令 $\delta = 0$ (即令 $D_f \rightarrow \infty$), 则式(30)可退化为 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \int_0^{\infty} \tilde{f}(\tilde{\zeta}) J_{2n+1}(\tilde{\zeta}) \sin(\tilde{\zeta} \tilde{x}) d\tilde{\zeta} = 1$, 问题就转变为研究饱和地基上条形刚性基础的摇摆振动问题。

5 数值计算的处理及算例分析

不考虑条形弹性基础的质量 (即令 $\tilde{\rho} = 0$)。

由式(31)发现, 在式子的左边含有未知数 $\tilde{x}$, 为了得到问题的解, 取式(24)的前 n 项, 则式(31)含有 $A_0, A_1, \dots, A_n$ 共 $(n+1)$ 个未知数, 根据对称性可只考虑 $\tilde{x} \in [0, 1]$, 将其 n 等分, 并将 $\tilde{x} = \frac{i}{n}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1, n$) 分别代入式(31), 可得到 $(n+1)$ 个方程, 则式(31)与下列线性代数方程组等价:

$$\left. \begin{aligned} & A_0 C_{1,0} + A_1 C_{3,0} + \dots + A_n C_{2n+1,0} = 1 \\ & A_0 C_{1,1/n} + A_1 C_{3,1/n} + \dots + A_n C_{2n+1,1/n} = 1 \\ & \dots \dots \dots \\ & A_0 C_{1,(n-1)/n} + A_1 C_{3,(n-1)/n} + \dots + A_n C_{2n+1,(n-1)/n} = 1 \\ & A_0 C_{1,1} + A_1 C_{3,1} + \dots + A_n C_{2n+1,1} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

式中:

$$\begin{aligned} C_{1,\tilde{x}} &= \int_0^{\infty} \tilde{f}(\tilde{\zeta}) J_1(\tilde{\zeta}) \sin(\tilde{\zeta} \tilde{x}) d\tilde{\zeta} - b^2 \delta \int_0^{\infty} \frac{1}{\tilde{\zeta}^4} J_1(\tilde{\zeta}) \cdot \\ & (\sin \tilde{\zeta} \tilde{x} - 2) d\tilde{\zeta} - b^2 \delta \tilde{x}^2 - b \delta \tilde{x} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} C_{2n+1,\tilde{x}} &= \int_0^{\infty} \tilde{f}(\tilde{\zeta}) J_{2n+1}(\tilde{\zeta}) \sin(\tilde{\zeta} \tilde{x}) d\tilde{\zeta} - b^2 \delta \\ & \int_0^{\infty} \frac{1}{\tilde{\zeta}^4} J_{2n+1}(\tilde{\zeta}) (\sin \tilde{\zeta} \tilde{x} - 2) d\tilde{\zeta} \quad (n \neq 0) \end{aligned} \quad (37)$$

对于式(36), 右边的第1项采用复合 Simpson 法则求解, 将第2项和第3项合并后用数学软件直接积分求解得到, 第4项则用数学软件直接求解得

到; 对于式 (37), 右边的第 1 项采用复合 Simpson 法则求解, 第 2 项则用数学软件直接求解得到。在数值计算的处理中将积分区间 $[0, \infty]$ 划分为 $[0, A]$ 和 (A, ∞) , 区间的分段点 A 由位移与应力的关系函数 $f(\zeta)$ 确定, 这是因为当 $\zeta \rightarrow \infty$ 时, $f(\zeta)$ 与 $1/\zeta$ 同阶无穷小, 因而取当两者的差值很小时的 ζ 作为积分的分段点即 A 。在对区间 $[0, A]$ 积分时, 采用 Simpson 数值积分方法, 而对于区间 (A, ∞) , 由于有 $\int_0^\infty \frac{J_{2k+1}(\zeta)J_{2n+1}(\zeta)}{\zeta} d\zeta = 0$ (当 $k \neq n$ 且 k 与 n 为不同时为 0 的整数时), 因而可通过转化为 $[0, A]$ 的区间进行求解, 本文采用数学软件直接求解得到区间 (A, ∞) 的积分值。

在算例分析中, 土体计算参数如表 1 所示, 条形基础的半宽均取为 2 m。

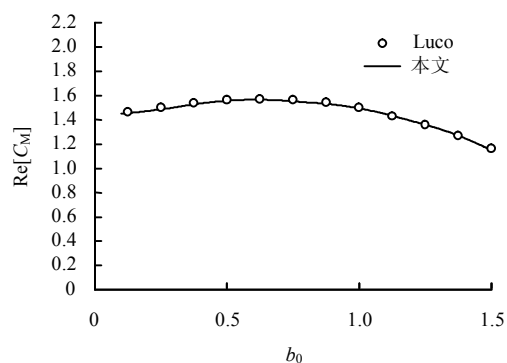
表 1 土体的各种参数
Table 1 Soil parameters

基础宽度 b / m	剪切模量 G / Pa	孔隙率 n	泊松比 μ	土体密度 ρ_s / (kg/m ³)
2	3.5×10^7	0.35	0.25	2 650

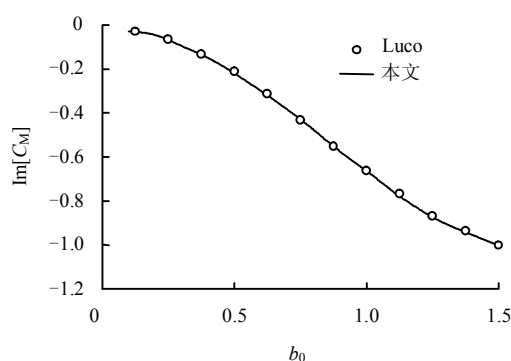
首先为验证本文计算结果的正确性, 将饱和半空间的解退化到单相弹性半空间 (令 $\rho_f = 0$, $\delta = 0$, 分析动力柔度系数 C_M 随无量纲频率 b_0 的变化曲线, 并与 Luco 等人中 $\mu = 0.25$ 数值计算结果进行了对比。如图 2 所示, 本文退化的计算结果与 Luco 等人的计算结果比较吻合。

为研究 δ 对基础摇摆振动的影响, 取 $\delta = 0.0$ 、0.1、10、1 000 以反映基础的弹性特性对条形弹性基础摇摆振动特性的影响, 除土的动力渗透系数 $k_d = 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 外, 其余的土体参数的取值同表 1, 然后由式 (32) 求得与条形基础中心相对应的动力柔度系数 C_M 随无量纲频率 b_0 的变化曲线。

图 3 表明, 当 $\delta = 0.0$ 、0.1 时, 饱和半空间上条形弹性基础的动力柔度系数 C_M 的曲线基本上重合, 而 $\delta = 0.0$ 即为条形刚性基础摇摆振动的动力柔度曲线, 因而可以认为, 当 $\delta \leq 0.1$ 时, 在不同无量纲频率 b_0 下对于饱和半空间上条形弹性基础的摇摆振动特性与刚性基础的相同; 同时可以得到, 对动力柔度系数 C_M 的实部来讲, 当无量纲频率 b_0 小于 2.5 时, 动力柔度系数 C_M 受无量纲频率 b_0 的变化影响较大; 对动力柔度系数 C_M 的虚部来讲, 当无量纲频率 b_0 小于 3.2 时, 动力柔度系数 C_M 受无量纲频率 b_0 的变化影响较大。然而, 当无量纲频率 b_0 超过一定数值 (对动力柔度系数 C_M 的实部这个值是



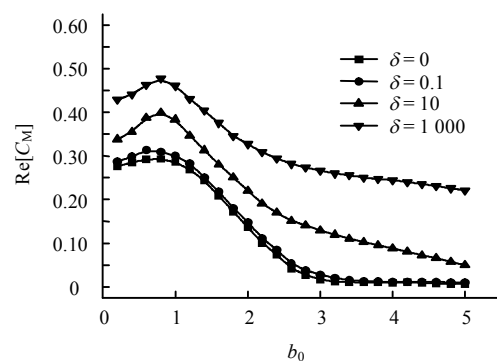
(a) 动力柔度系数 C_M 实部



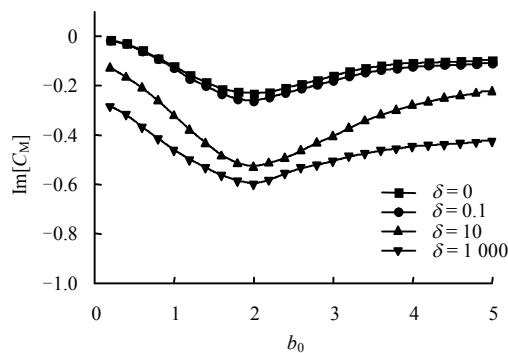
(b) 动力柔度系数 C_M 虚部

图 2 单相弹性半空间上动力柔度系数 C_M

Fig.2 The dynamic compliance coefficients of a strip footing on the ideal elastic half-space



(a) 动力柔度系数 C_M 实部



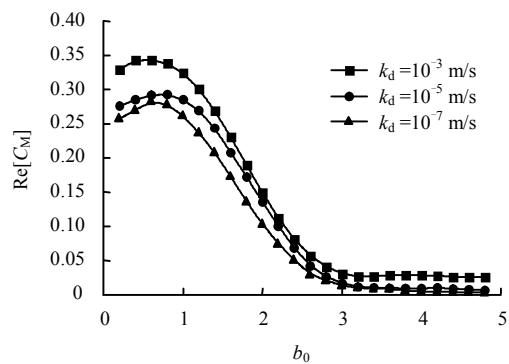
(b) 动力柔度系数 C_M 虚部

图 3 $k_d = 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 时饱和半空间动力柔度系数 C_M

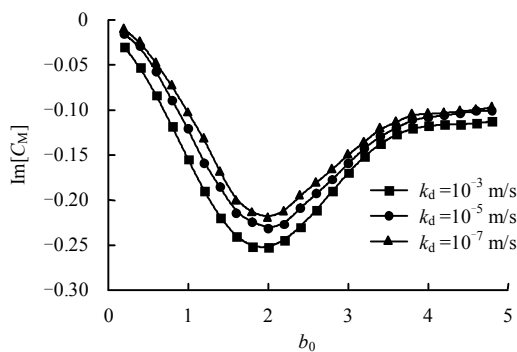
Fig.3 The dynamic compliance coefficients for saturated stratum versus dimensionless frequency ($k_d = 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$)

2.5, 虚部是 3.2), 曲线平缓, 动力柔度系数 C_M 受无量纲频率 b_0 的变化影响很小。图 3 还表明, 当 $\delta=10$ 、1 000 时, 所得的动力柔度系数曲线与 $\delta=0.0$ 、0.1 时有着显著的区别, 动力柔度系数 C_M 的实部和虚部的绝对值均较 $\delta=0.0$ 、0.1 时的大, 且从图中得到, 当 δ 愈大时, 如图中的 $\delta=1\ 000$, 动力柔度系数曲线随无量纲频率 b_0 的变化趋于平缓, 而对于一般的 δ 值, 如图中的 $\delta=10$, 动力柔度系数 C_M 的实部和虚部的绝对值随无量纲频率 b_0 的变化显著, 因而, 对于一般的 δ 值 (如 $\delta=10$) 须考虑无量纲频率 b_0 的影响。

为了分析动力渗透系数对饱和地基上条形弹性基础的摇摆振动动力柔度系数的影响, 取土的动力渗透系数 k_d 分别为 10^{-3} 、 10^{-5} 、 $10^{-7}\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 。考虑 $\delta=0.0$ 、1、10 三种情况下饱和半空间动力柔度系数 C_M 随无量纲频率 b_0 的变化情况。图 4~6 表明, 当动力当动力渗透系数 k_d 为 $10^{-5}\sim 10^{-3}\text{m/s}$ 时, 对动力柔度系数 C_M 有较大的影响, 而且, 动力渗透系数 k_d 越大, 动力柔度系数 C_M 的实部和虚部的绝对值越大。图 4~6 同时也表明动力渗透系数对 k_d 对动力柔度系数 C_M 的影响比 δ 对动力柔度系数 C_M 的影响要小。



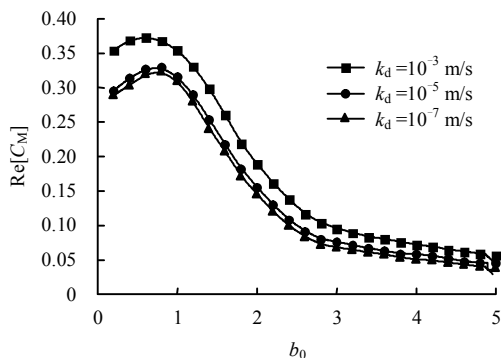
(a) 动力柔度系数 C_M 实部



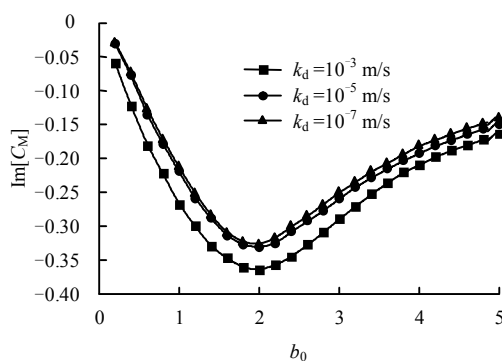
(b) 动力柔度系数 C_M 虚部

图 4 $\delta=0$ 时饱和半空间动力柔度系数 C_M

Fig.4 The dynamic compliance coefficients for saturated stratum versus dimensionless frequency ($\delta=0$)



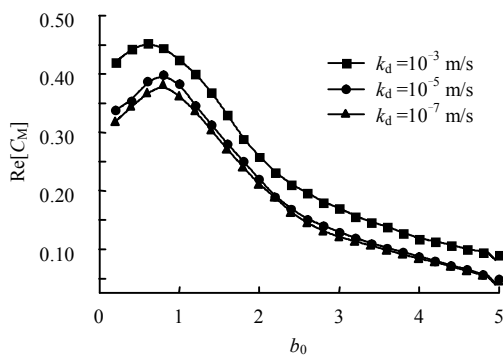
(a) 动力柔度系数 C_M 实部



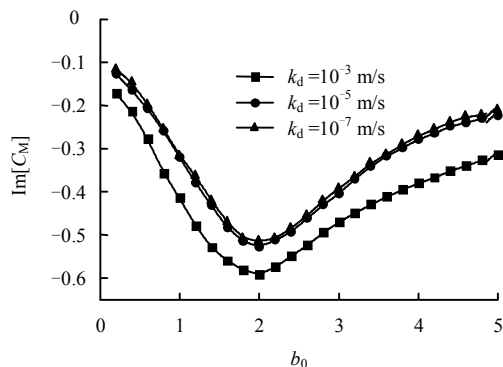
(b) 动力柔度系数 C_M 虚部

图 5 $\delta=1$ 时饱和半空间动力柔度系数 C_M

Fig.5 The dynamic compliance coefficients for saturated stratum versus dimensionless frequency ($\delta=1$)



(a) 动力柔度系数 C_M 实部



(b) 动力柔度系数 C_M 虚部

图 6 $\delta=10$ 时饱和半空间动力柔度系数 C_M

Fig.6 The dynamic compliance coefficients for saturated stratum versus dimensionless frequency ($\delta=10$)

最后分析了不同的泊松比 μ 对饱和半空间上条形弹性基础摇摆振动的动力柔度系数 C_M 的影响。分析中, 土体的动力渗透系数为 $10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 泊松比 μ 为 0.2、0.3、0.4, 水的密度 ρ 为 $1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 其他的土体参数同表 1。图 7~9 表明, 对于饱和半空间, 当泊松比 $\mu=0.2$ 、0.3、0.4 时, 动力

柔度系数曲线可认为是基本上重合的, 这与文献 Luco 和 Westmann 的单相弹性半空间的数值结果是有明显区别的 (对于单相弹性半空间, 不同的泊松比 μ , 动力柔度系数 C_M 有着较大的差异), 这就是饱和半空间和单相弹性半空间在条形基础摇摆振动的不同之处。

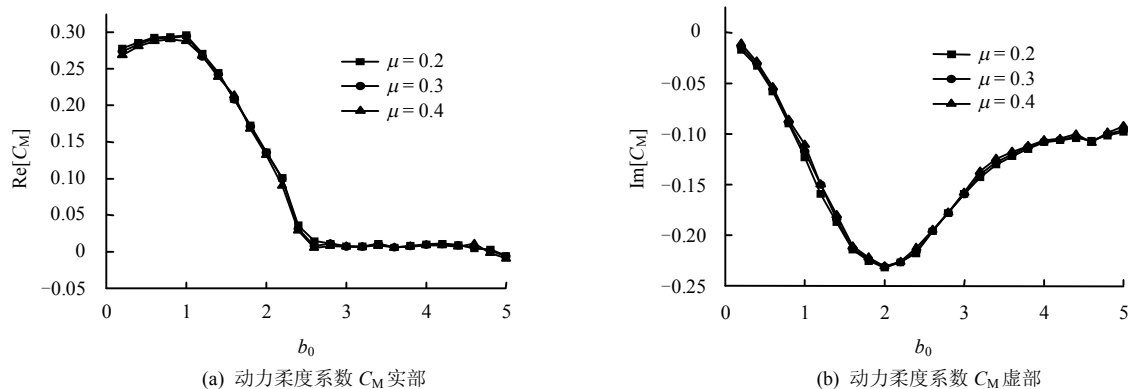


图 7 $k_d=10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 、 $\delta=0$ 时饱和半空间动力柔度系数 C_M
Fig.7 The dynamic compliance coefficients for saturated stratum versus dimensionless frequency ($k_d=10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 、 $\delta=0$)

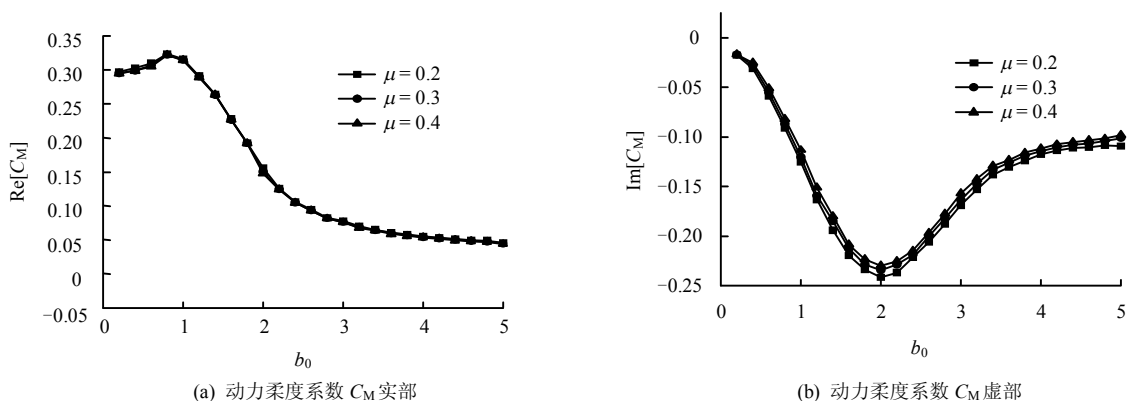


图 8 $k_d=10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 、 $\delta=1$ 时饱和半空间动力柔度系数 C_M
Fig.8 The dynamic compliance coefficients for saturated stratum versus dimensionless frequency ($k_d=10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 、 $\delta=1$)

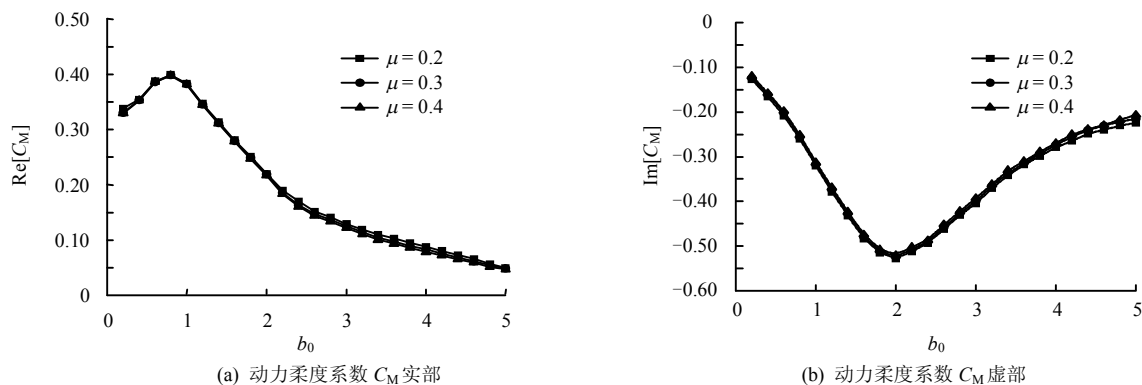


图 9 $k_d=10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 、 $\delta=10$ 时饱和半空间动力柔度系数 C_M
Fig.9 The dynamic compliance coefficients for saturated stratum versus dimensionless frequency ($k_d=10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 、 $\delta=10$)

6 结 论

通过本文的理论研究和计算分析,可得到如下结论:

(1) 对于饱和半空间上条形弹性基础的摇摆振动,当 $\delta=0$ 时即可退化为条形刚性基础的摇摆振动问题,因而,条形刚性基础的摇摆振动可认为是本文中当 $\delta=0$ 的特殊情形。

(2) 对于饱和半空间上条形弹性基础的摇摆振动,当弹性基础的挠曲刚度较大或 $\delta \leq 0.1$ 时,可认为弹性基础的摇摆振动特性与刚性基础的类同,忽略 δ 对摇摆振动的影响;同时可以得到,对动力柔度系数 C_M 的实部来讲,当无量纲频率 b_0 小于2.5时,动力柔度系数 C_M 受无量纲频率 b_0 的变化影响较大;对动力柔度系数 C_M 的虚部来讲,当无量纲频率 b_0 小于3.2时,动力柔度系数 C_M 受无量纲频率 b_0 的变化影响较大。然而,当无量纲频率 b_0 超过一定数值(对动力柔度系数 C_M 的实部这个值是2.5,虚部是3.2),曲线平缓,动力柔度系数 C_M 受无量纲频率 b_0 的变化影响很小。对于一般的 δ (如 $\delta=10$)须考虑其对摇摆振动特性的影响;同时有,随着 δ 的增大,动力柔度系数曲线趋于平缓,无量纲频率 b_0 对摇摆振动的影响减弱。

(3) 当动力渗透系数 k_d 为 $10^{-5} \sim 10^{-3}$ m/s时,对动力柔度系数 C_M 有较大的影响,而且,动力渗透系数 k_d 越大,动力柔度系数 C_M 的实部和虚部的绝对值越大。同时研究表明,动力渗透系数对 k_d 对动力柔度系数 C_M 的影响比 δ 对动力柔度系数 C_M 的影响要小。

(4) 饱和半空间上,不同泊松比的情况下动力柔度系数曲线基本上是重合的,这与单相弹性半空间的数值结果是有明显区别的,这就是饱和半空间和单相弹性半空间在条形基础摇摆振动的不同之处。

参 考 文 献

- [1] OIEN M A. Steady motion of a rigid strip bonded to an elastic half space[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1971, 38: 328—334.
- [2] OIEN M A. Steady motion of a plate on an elastic half space[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1973, 40: 478—484.
- [3] LUCO J E, WESTMANN R A. Dynamic response of a rigid footing bonded to an elastic half space[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1972, 39(2): 527—534.
- [4] GAZETAS G, ROESSET J M. Forced vibrations of strip footing on layered soils[C]//Proc. Meth. Struct. Anal. 1, ASCE. New York: [s. n.], 1976: 115—131.
- [5] HRYNIEWICZ Z. Dynamic response of a rigid strip on an elastic half-space[J]. *Computer Methods in Applied and Mechanical Engineering*, 1981, 25: 355—364.
- [6] BIOT M A. The theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, 28(2): 168—191.
- [7] BIOT M A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media[J]. *Journal of Applied Physics*, 1962, 33(4): 1482—1498.
- [8] KASSIR M K, XU J. Interaction functions of a rigid strip bonded to saturated elastic half space[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1988, 24: 915—936.
- [9] SENJUNTICHA T, RAJAPAKSE R K N D. Dynamics of a rigid strip bonded to a multi-layered poroelastic half-plane[M]. The Netherlands: Kluwer Academic, 1996: 353—369.
- [10] RAJAPAKSE R K N D, SENJUNTICHA T. Dynamic response of a multi-layered poroelastic medium[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1995, 24(5): 703—722.
- [11] 金波, 徐植信. 多孔饱和半空间上刚体垂直振动的轴对称混合边值问题[J]. *力学学报*, 1997, 29(6): 711—719.
- [12] JIN Bo, LIU Hua. Horizontal vibrations of a disk on a poroelastic half-space[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2000, 19: 269—275.
- [13] JIN Bo, LIU Hua. Rocking vibrations of rigid disk on saturated poroelastic medium[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2000, 19: 519—529.
- [14] 陈胜立. 饱和地基上基础与板的竖向振动特性研究[博士学位论文 D]. 杭州: 浙江大学, 2000.
- [15] 陈龙珠. 饱和土中弹性波的传播速度及基应用[博士学位论文 D]. 杭州: 浙江大学, 1987.
- [16] 付兵. 饱和地基上基础的摇摆振动特性研究[博士学位论文 D]. 杭州: 浙江大学, 2005.
- [17] 李庆金. 饱和地基上条形基础的竖向振动特性分析[硕士学位论文 D]. 杭州: 浙江大学, 2005.
- [18] SZILARD R. Theory and analysis of plates: Classical and numerical methods[M]. New Jersey: Englewood Cliffs, 1974.
- [19] 严人觉, 王贻荪, 韩清宇. 动力基础半空间理论概论[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1981: 236—237.